2.2.3 Annexe :

Espaces L^P et ℓ^p

Beaucoup d'exemples d'espaces de Banach proviennent de la théorie de la mesure. L'une des familles les plus importantes en analyse est la suivante. Nous renvoyons au cours d'intégration pour les notions nécessaires de théorie de la mesure et d'intégration.

Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. On note q, et on l'appelle exposant conjugué de p, l'élément de $[1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Notons que si $p = 1$, alors $q = +\infty$ et si $p = +\infty$, alors $q = 1$.

Si $p < +\infty$, notons $\mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ (ou $\mathrm{L}^p(X)$ si (Σ, μ) est sous-entendu) l'espace des classes d'équivalences d'application f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour Σ, telles que $|f|^p$ soit intégrable, modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. On pose alors, pour tout f dans $\mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$,

$$||f||_p = \left(\int_{x \in X} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

Si $p = +\infty$, notons $\mathrm{L}^\infty(X, \Sigma, \mu)$ (ou $\mathrm{L}^\infty(X)$ si (Σ, μ) est sous-entendu) l'espace des classes d'équivalences d'application f de X dans $\mathbb{K}$, mesurables pour Σ , *essentiellement bornée* (i.e. s'il existe $M \geq 0$ tel que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$), modulo la relation d'équivalence $f \sim g$ si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. On pose alors, pour tout f dans $\mathrm{L}^\infty(X, \Sigma, \mu)$,

$$||f||_\infty = \inf\{M \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

Notons $T : \mathrm{L}^q(X) \to (\mathrm{L}^p(X))'$ application définie par

$$f \mapsto \left\{g \mapsto \int_{x \in X} f(x)g(x)d\mu(x)\right\}$$

où $(\mathrm{L}^p(X))' = \mathscr{L}(\mathrm{L}^p(X), \mathbb{K})$ est le dual de L^p.

2.2.102 THÉORÈME

Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$.

1) Alors $\mathrm{L}^p(X)$ est un espace de Banach pour la norme $|| \cdot ||_p$.
2) Si $p < +\infty$, en supposant que μ soit σ-finie i.e. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$, alors $T : \mathrm{L}^q(X) \to (\mathrm{L}^p(X))'$ est un isomorphisme linéaire qui est une isométrie entre la norme $|| \cdot ||_q$ et la norme duale de la norme $|| \cdot ||_p$.
3) L'application $T : \mathrm{L}^1(X) \to (\mathrm{L}^\infty(X))'$ est une application linéaire isométrique, en général non surjective.

4) Si $p < +\infty$, si μ est σ-finie, si la σ-algèbre est engendrée par une partie dénombrable, alors $\mathrm{L}^p(X)$ est séparable.

Dans la suite, pour tout $p \in [1, +\infty\,[$, on identifiera $(\mathrm{L}^p(X))'$ avec $\mathrm{L}^q(X)$ par l'isométrie linéaire T^{-1}, où q est l'exposant conjugué de p, et en particulier $\big(\mathrm{L}^1(X)\big)'$ avec $\mathrm{L}^\infty(X)$.

2.2.103 Exemple. En prenant X un ensemble non vide, $\Sigma = \mathscr{P}(X)$, μ la mesure de comptage sur X (définie par $\mu(A) = |A|$, le cardinal de A pour tout $A \subset X$), et $p \in [1, +\infty]$, l'espace $\mathrm{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ est noté $\ell^p(X, \mathbb{K})$(ou $\ell^p(\mathbb{K})$ si $X = \mathbb{N}$).
Si $p < +\infty$, c'est l'espace vectoriel des familles indexées par X à valeurs dans $\mathbb{K}$, de puissance p-ième sommable, muni de la norme

$$||(x_i)_{i\in X}||_p = (\sum_{i\in X} |x_i|^p)^{1/p},$$

qui est donc un espace de Banach.

2.2.104 Exemple. Pour tout $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ et tout $p \in [1, +\infty[$, en prenant pour X un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et pour μ la restriction à Ω de la mesure de Lebesgue, l'espace vectoriel $\mathrm{L}^p(\Omega,\ \mathbb{K})$ (ou $\mathrm{L}^p(\Omega)$ si $\mathbb{K}$ est sous-entendu) des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$ de puissance p-ième intégrable (modulo les applications nulles presque partout), muni de la norme

$$||f||_p = (\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p},$$

est un espace de Banach. Comme la mesure de Lebesgue sur tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est σ-finie, pour tout p dans $[1, +\infty[$, le dual topologique de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est $\mathrm{L}^q(\Omega)$ pour q l'exposant conjugué de p (et en particulier, le dual topologique de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ est $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Si $p < +\infty$, alors l'espace de Banach $\mathrm{L}^p(\Omega)$ est séparable. Mais si Ω est non vide, alors $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

2.2.105 Théorème
Soient $p \in [1, +\infty[$ Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace vectoriel $\mathscr{C}_c(\Omega,\ \mathbb{K})$, des applications continues à support compact dans Ω, est dense dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$ pour la norme $||\cdot||_p$, et que $\mathscr{C}_c(\Omega,\ \mathbb{K})$ est séparable pour la norme uniforme.

Soient X un espace topologique localement compact non vide et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application continue $f : X \to \mathbb{K}$ *s'annule à l'infini* si pour tout $\epsilon > 0$, $\{x \in X \,|\, |f(x)| \geq \epsilon\}$ est compact. Une application continue nulle à l'infini est en particulier bornée. Notons que si X est compact, alors toute application continue s'annule à l'infini.

On note $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ qui s'annulent à l'infini, que l'on munit de la norme uniforme. En particulier, si X est compact, alors $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K}) = \mathscr{C}(X, \mathbb{K})$ muni de la norme uniforme.

2.2.106 PROPOSITION

L'espace vectoriel normé $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ est un espace de Banach, et le sous-espace $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ applications continues à support compact est dense dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$.

Démonstration: Comme l'espace vectoriel $\mathscr{BC}(X, \mathbb{K})$ des applications continues bornées est complet pour la norme uniforme et puisqu'un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach pour la norme induite, il suffit de montrer que $\mathscr{C}_0(X, \mathrm{K})$ est fermé dans $\mathscr{BC}(X, \mathbb{K})$ pour obtenir la première assertion.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ convergeant uniformément vers $f \in \mathscr{BC}(X, \mathbb{K})$. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ et soit K un compact de X tel que, pour tout $x \notin K$, on ait $|f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Alors pour tout $x \notin K$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Le premier résultat s'en déduit. Montrons que $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$. Soient $f \in \mathscr{C}_0(X, \mathbb{K})$ et $\epsilon > 0$. Soit K un compact de X tel que, pour tout $x \notin K$, on ait $|f(x)| < \epsilon$. Puisque X est localement compact, soit K' un voisinage compact de K et V un voisinage ouvert de K contenu dans K'. D'après le lemme d'Urysohn, Il existe une application continue $\phi : K' \to [0,1]$ telle que $\phi(x) = 0$ pour tout x dans le fermé $K' - V$ et $\phi(x') = 1$ pour tout x' dans le fermé K disjoint de $K' - V$. En prolongeant ϕ par 0 en dehors de K', on obtient un élément $\phi \in \mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$ à valeurs dans $[0,1]$ valant 1 sur K. Posons $g = \phi f$, qui est dans $\mathscr{C}_c(X, \mathbb{K})$. Pour tout x dans X, on a$|f(x) - g(x)| = 0$ si $x \in K$ et sinon

$$|f(x) - g(x)| \leq |1 - \phi(x)||f(x)| \leq |f(x)| < \epsilon.$$

Donc $||f - g||_\infty < \epsilon$, et le résultat en découle. ■

Soit $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes, régulières et réelles si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), muni de la norme $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de représentation de Riesz.

2.2.108 THÉORÈME
L'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ *est un espace de Banach, et l'application de* $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ *dans* $\mathscr{C}_0(X,\ \mathbb{K})'$ *définie par*

$$\mu \mapsto \{f \mapsto \mu(f) = \int_{x\in X} f(x)d\mu(x)\}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique pour la norme de la masse totale sur $\mathscr{M}_{\mathbb{K}}(X)$ *et la norme duale sur* $\mathscr{C}_0(X,\ \mathbb{K})'$.

En particulier, si X est compact, alors le dual topologique de $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(X,\ \mathbb{C})$ (muni de la norme uniforme) est l'espace des mesures réelles $\mathscr{M}_{\mathbb{R}}(X)$ ou complexes $\mathscr{M}_{\mathbb{C}}(X)$ sur X.

Le théorème de Banach-Alaoglu

La topologie faible-$*$ étant moins fine, elle contient moins d'ouverts, il est donc plus facile d'y établir la compacité (il y a moins de recouvrements ouverts). On a en effet la compacité de la boule unité fermée pour cette topologie :

2.2.109 THÉORÈME (THÉORÈME DE BANACH-ALAOGLU)
Soit E un espace normé. Toute partie fortement bornée de E' est relativement compacte pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E',\ E)$.

Démonstration: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le cas réel se traite de la même manière). Soient B une partie bornée de E', $M = \sup_{f\in B} \|f\|$ et $B_M = \{f \in E' \,|\, \|f\| \le M\}$. Pour $x \in E$, on pose $D_x = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le M\|x\|\}$. Alors $X = \prod_{x\in E} D_x$, muni de la topologie produit, est compact par le théorème de Tychonov. Soit $i : B_M \to X$ l'application définie par $f \mapsto (f(x))_{x\in E}$. Alors i est un homéomophisme sur son image. En effet, i est continue car la composée de i avec chaque projection sur les facteurs de X est continue, en effet c'est l'application $f \mapsto f(x)$ qui est continue pour la topologie faible-*. i est injective, car $(f(x))_{x\in X}$, car $(f(x))_{x\in E} = (g(x))_{x\in E}$ si et seulement si $f = g$. Enfin, i est une application ouverte, car pour $f_0 \in E'$ et $\varepsilon > 0$, on a $i(W_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_k}) = \{(f(x))_{x\in E} \,|\, |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\ i \in \{1,\ldots,k\}\}$, qui est un pavé ouvert pour la topologie produit sur X. Ainsi $i : B_M \to i(B_M)$ est un homémorphisme. Pour montrer que B_M est compact il suffit de montrer que $i(B_M)$ est un fermé de X. Comme B_M est l'ensemble des formes linéaires de norme $\le M$, $i(B_M)$ est alors l'ensemble des $(f(x))_{x\in E}$ dans X tels que : $f(x+x') = f(x) + f(x')$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $(f(x))_{x\in E} \in \overline{i(B_M)}$. Alors, par définition de la topologie produit, pour tout $y, z \in E$ et $\varepsilon > 0$ $W_{\varepsilon,y,z}(f) = \{(g(x))_{x\in E}$:

$|f(y)-g(y)|<\varepsilon,\ |f(z)-g(z)|<\varepsilon,\ |f(y+z)-g(y+z)|<\varepsilon\} \cap i(B_M) \neq \emptyset$. Soit $h \in B_M$ telle que $i(h) \in W_{\varepsilon,y,z}(f)$. Alors, $|f(y)-g(y)|<\varepsilon$, $|f(z)-g(z)|<\varepsilon$ et $|f(y+z)-g(y+z)|<\varepsilon$. Comme h est linéare $h(y+z)-h(y)-h(z)=0$ d'où $|f(y+z)-f(y)-f(z)|<\varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, on aura $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout $y,z\in E$. On montre de même que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$ et $y\in E$, $f(\lambda y)=\lambda f(y)$ d'où $(f(x))_{x\in E}\in i(B_M)$. Ainsi $\overline{i(B_M)}=i(B_M)$ et par suite $\overline{(B)}$ est compacte. ∎

2.2.111 COROLLAIRE
Si E est un evn reflexif, alors la boule unité fermée de E est compacte pour la topologie faible.

2.2.112 EXEMPLE. Pour $1<p<+\infty$, la boule unité de $L^p(\Omega,\mu)$ est faiblement compacte. La boule unité de tout espace de Hilbert est faiblement compacte

L'inégalité de Young

2.2.113 THÉORÈME (L'INÉGALITÉ DE YOUNG)
Soit p, q et $r\in[1,+\infty]$ tels que, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$.
Alors pour f et g fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ on a :

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

En particulier, si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration: On a $|f*g(x)| \leq |f|*|g|(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|^p|g(y)|^q)^{\frac{1}{r}}\,|f(x-y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}|g(y)||^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\,dy$$

Comme $1=(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{r}$, l'inégalité de Hölder nous donne :

$$|f*g(x)| \leq \|\,(|f|^p(x-.)|g|^q)^{\frac{1}{r}}\,\|_r.\||f|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}(x-.)\|_{\frac{pr}{r-p}}.\||g|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|_{\frac{qr}{r-q}}$$

d'où

$$|f*g(x)| \leq (|f|^p*|g|^q(x))^{\frac{1}{r}}\,\|f\|_p^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|g\|_q^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f*g(x)|^r\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p*|g|^q(x)\,dx\right)\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}$$

$$\leq (\||f|^p\|_1\||g|^q\|_1)\,\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q} = (\|f\|_p^p\|g\|_q)\,\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}$$

finalement, $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$ ∎